Terbit online pada laman web jurnal: http://ijtvet.com/index.php/ijtvet

IJTVET
International Journal of Technology Vocational Education and Training
Vol. 1 No. 2 (2020) 149 - 154 ISSN Media Elektronik: 2723-0546

Batas Atas Bilangan Strong Rainbow Connection Pada Graf Jahangir $J_{(3,M)}$ Dengan $2 \leq M \leq 3$

Dwi Novri Asmara
[1]Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Dharmas Indonesia
[1]ijtvet@gmail.com[2]prosiding@yahoo.com

Abstract
The Jahangir Graph $J_{(n,m)}$ for $n \geq 2$, $m \geq 2$ is a graph with the period of $(nm + 1)$ that comprises a Cycle $(C_{n,m})$ by adding a close period to the period of m from $C_{n,m}$, having a graphn in $C_{n,m}$ each other. A graph is called rainbow connection (rc) if every single line connecting two periods of u, v in G consists of rainbowu-vpath, and a graph is considered strong rainbow connection (src)if there is a line with the length of d(u,v), connecting two periods of u,v that consist of rainbow u-v geodesic. This research aimed to obtain upper limit srcin the Jahangir Graph of $J_{(3,m)}$for m = 2 end m = 3. It was found that the upper limit of numeral src $(J_{3,m}) \leq \frac{m^2}{8} + \frac{m}{4} + 3$form = 2 and src $J_{(3,m)} \leq \frac{3m+3}{2} - 1$for m = 3.
Keywords: GraphJahangir, strong rainbow ,connection number

Abstrak
Suatu Graf Jahangir $J_{(n,m)}$ untuk $n \geq 2$, $m \geq 2$ adalah suatu graf dengan $(nm + 1)$ titik yaitu graf yang terdiri dari suatu *Cycle* $(C_{n,m})$ dengan menambahkan suatu titik bertetangga ke m titik dari $C_{n,m}$yang berjarak *n* satu sama lain di $C_{n,m}$. Suatu graf dikatakan *rainbow connection (rc)* jika setiap lintasan yang menghubungkan dua titik *u, v* di *G* memuat r*ainbowu-vpath* dan suatu graf dikatakan *strong rainbow connection (src)* yang jika terdapat lintasan dengan panjang *d(u,v)* yang menghubungkan dua titik *u,v* memuat *rainbow u-v geodesic*. Tujuan dalam penelitian ini adalah mendapatkan batas atas *src*pada graf Jahangir $J_{(3,m)}$dengan m = 2 dan m = 3. Pada penelitian diperoleh batas atas untuk bilangan *src* $(J_{3,m}) \leq \frac{m^2}{8} + \frac{m}{4} + 3$untuk$m = 2$, dan *src* $J_{(3,m)} \leq \frac{3m+3}{2} - 1$untuk $m = 3$.
Kata kunci : Graf Jahangir, *strong rainbow, connection number*

1. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V(G), E(G), ψG) dengan V(G) himpunan titik tak kosong, E(G) adalah himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik pada G dan suatu fungsi keterkaitan (incidency function) ψG yang mengaitkan setiap sisi di G dengan pasangan titik di G. Banyaknya titik di G disebut orde(order) dari G yang dinotasikan dengan |V(G)|=v, dan banyaknya sisi pada G disebut ukuran size dari G dinotasikan dengan |E(G)|=e. Konsep dari rainbow connection diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 2008. Misalkan G merupakan suatu graf terhubung tak trivial, didefinisikan suatu pewarnanc: E(G)→ {1,2,⋯,n};n∈N, dimana sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan u−v path dikatakan sebagai *rainbow path* pada G jika tidak terdapat dua sisi pada path yang berwarna sama. Suatu graf G dikatakan *rainbow-connected* terhadap pewarnaan sisi, jikaG memuat rainbow u-v path untuk setiap 0 dua titik u dan v pada G. Jika graf G bersifat rainbow connected maka pewarnaan sisinya dinamakan rainbow coloring pada G.

Menurut Siang (2002:187), suatu graf G terdiri dari 2 himpunan yang berhingga, yaitu himpunan simpul-simpul tidak kosong

Diterima Redaksi : 01-10-2020 | Selesai Revisi : 30-11-2020 | Diterbitkan Online : 30-11-2020

(V(G)) dan himpunan garis-garis (E(G)). Jadi, suatu graf G adalah pasangan himpunan V dan E, dituliskan G = (V,E), dengan V adalah suatu himpunan berhingga dan E adalah suatu himpunan rusuk yang bersisian dengan V.

Masalah jembatan Konigsberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan yang ada di Kota Konigsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler memisalkan daratan yang dihubungkan oleh jembatan dengan titik *(vertex)* dan jembatan dinyatakan dengan sisi (*edge*), sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1.

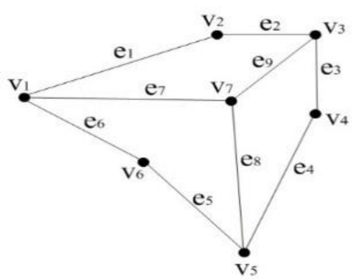
Gambar 1. Jembatan Konigsberg

Dengan menggunakan model tersebut, Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula.

A. Termologi Graf

Definisi Graf G adalah pasangan himpunan $G = (v, e, \psi)$ dengan $V(G)$ himpunan. titik tak kosong, $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik pada G dan suatu fungsi keterkaitan (*incidency function*) ψ G yang mengaitkan setiap sisi di G dengan pasangan titik di G[1].. Banyaknya titik di G disebut orde (*order*) dari G yang dinotasikan dengan $V(G) = v$, dan banyaknya sisi pada G disebut ukuran size dari G dinotasikan dengan $| E(G) | = e$.

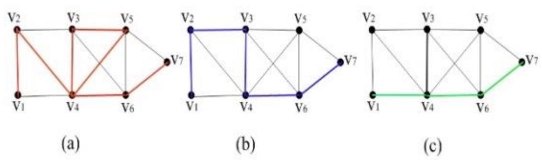
Misalkan terdapat titik-titik u, v € $V(G)$. Jika terdapat sisi uv€ $E(G)$, maka titik $u$dan $v$dikatakan bertetangga *(adjacent)*, sedangkan sisi uv dikatakan terkait *(incident)* dengan titik u dan v. Berikut ini adalah contoh dari graf G pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf G

Orde (*order*) dari G adalah banyaknya titik di G, dinotasikan dengan $|V(G)|$. Ukuran (*size*)dari G adalah banyaknya sisi di G, dinotasikan dengan $|E(G)|$. Pada Gambar 2. Graf G mempunyai $|V(G)| = 7$ titik dan $|E(G)| = 9$ sisi. Lingkungan *(neighbour)* dari suatu titik v di G adalah himpunan semua titik yang bertetangga dengan v, dinotasikan dengan $N_G(v)= u$ € $V(G)$ $|vu$ € $E(G)$. Pada Gambar2. graf*G mempunyai* $N_G(v) = v_1 = v_2\, v_7\, v_6$, $v_2 = v_1\, v_3$, $v_3 = v_2\, v_4\, v_7$, $v_4 = v_3\, v_5$, $v_5 = v_4\, v_6\, v_7$, $v_6 = v_1\, v_5$, $v_7 = v_1\, v_3\, v_5$. Derajat (*degree*) suatu titik v di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v, dinotasikan dengan $d_G(v)$. Pada Gambar 2. graf G terdapat titik $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3= 3$, $v_4 = 2$, $v_5 = 3$,$v_6 = 2$, $v_7 = 3$. Derajat minimum graf G dinyatakan dengan $\delta(G)=min\ \{d_G\ (v)|v$ € $V(G)\}$ dan derajat maksimum graf G dinyatakan dengan $\Delta(G)= maks\ \{d_G\ (v)\ |\ v$ € $V(G)\}$. Pada Gambar *2.* graf$G$ mempunyai $\delta(G) = 2$dan $\Delta(G) = 3$.

Jalan *(walk*) adalah suatu barisan yang memuat titik-titik dan sisi-sisi bergantian$W = v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3 \ldots v_k e_k$. Titik yang merupakan titik awal dan titik akhir disebut dengan titik terminal.Suatu jalan (*walk*) dapat dimulai dan diakhiri oleh titik yang sama disebut jalan tertutup (*close walk*). Sebaliknya, sebuah jalan (*walk*) yang tidak tertutup disebut jalan terbuka (*open walk*), sedangkan jejak *(trail*) merupakan sebuah jalan yang semua sisinya berbeda. Pada Gambar 3. (a) diberikan salah satu contoh jejak dalam graf G yaitu $v_1 - v_2 - v_4 - v_3 - v_5 - v_4 - v_6 - v_7$. Jika semua titik di jejak berbeda, maka jejak dinamakan lintasan (*path*). Pada Gambar 3. (b) merupakan salah satu contoh lintasan dalam graf G yaitu $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_6 - v_7$. Panjang *(length*) dari suatu lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut. Jarak (*distance*) antara u dan v adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan $d_G(u,v)$. Pada Gambar 3. (c) salah satu jarak antara titik v_1 ke v_7 sebanyak 3. Ilustrasi graf tentang definisi jalan (*walk*) dapat di lihat pada Gambar.3.

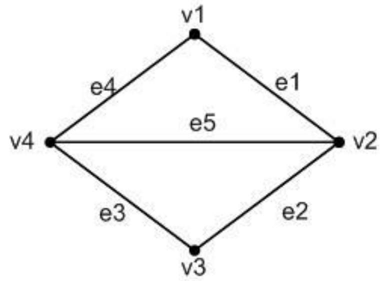


Gambar 3. (a). Jejak, (b). Lintasan, (c). Jarak dalam graf G

B. Jenis-Jenis Graf

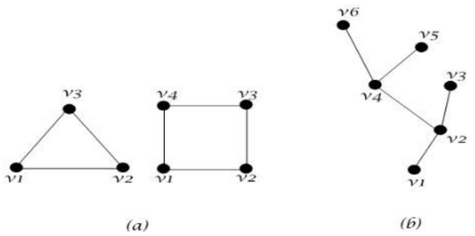
Dua buah simpul dalam graf, simpul u dan simpul v dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari u ke v. Jika dua buah simpul terhubung maka pasti simpul yang pertama dapat dicapai dari simpul yang kedua. Jika setiap simpul di dalam graf terhubung, maka graf tersebut disebut sebagai graf terhubung .

Graf terhubung dimana suatu graf sederhana dimana terdapat paling sedikit satu lintasan yang menghubungkan setiap dua titik *u,v€ G*. Jika tidak demikian, maka *G* dikatakan graf tidak terhubung. Kemudian, suatu titik pada graf terhubung dikatakan titik pendan (*pendant vertex*) jika titik tersebut berderajat satu. Suatu sisi pada graf terhubung dikatakan sisi pendan (*pendant edge*) jika salah satu titik ujungnya merupakan titik pendan. Ilustrasi graf terhubung dengan $n = 4$ dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf terhubung dengan $n = 4$

Graf lingkaran *(cycle)* adalah suatu graf yang setiap *titiknya* berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* titik dinotasikan dengan C_n, untuk $n \geq 3$. Ilustrasi graf lingkaran $C_n$dengan $3 \leq n \leq 5$. Sedangkan graf pohonadalah graf tak-berarah sederhanan dan jumlah simpulnya sebanyak *n*. Ilustrasi graf lingkaran dan graf pohon dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. (a). Graf lingkaran, (b). Graf Pohon

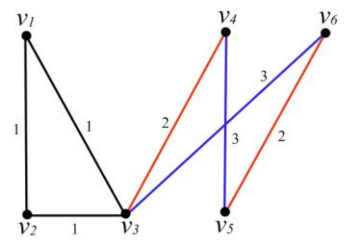
C. Bilangan *Strong Rainbow Connection*

Perkembangan teori graf saat ini tidak hanya secara teoritis, tetapi juga secaraaplikatif seperti dalam ilmu jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer,musik, dan ilmu-ilmu lainnya. Salah satu topik yang dipelajari dalam teorigraf adalah pengoperasian graf dan rainbow connection. Graf yang dihasilkandari pengoperasian graf yaitu gabungan dari dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan sebuah graf. Konsep rainbow connection dapat digunakan untuk pengamanan pengir-iman informasi rahasia antar pemerintah dan agen. Dalam halini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungandengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnyaharus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lin-tasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antaradua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam bilangan rainbow connection. Pengoperasian dilakukan pada graf CycleC4, graf Path Pn dengan graf komplit K1dan graf Tribun Tn. Untuk graf Cycle C4 dilakukan operasi Amalga−masi, untuk graf Path Pn dengan graf komplit K1 dilakuan operasi joint. Sedangkan untuk graf Tribun dilakukan pengoperasian shackle yaitu G = shack (T ribun, n).

Konsep dari *rainbow connection* diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 2008. Misalkan Gmerupakansuatu grafterhubungtak trivial, didefinisikan suatu pewarnaanc:E(G) →{1,2,...,n}; n ∈N,dimana sisiyang bertetanggaboleh berwarnasama. Suatu lintasanu−vpath dikatakan sebagai rainbow path pada G jika tidak terdapat dua sisi pada path yang berwarna sama. Suatu graf G dikatakan rainbow connected terhadap pewarnaan sisi, jika G memuat rainbow u-v path untuk setiap dua titik u dan v pada G. Jika graf G bersifat rainbow connected maka pewarnaan sisinya dinamakan rainbow coloring pada G.

Misalkan *G* merupakan suatu graf terhubung tak trivial, didefinisikan suatu pewarnaan $c:E(G) \rightarrow 1,2,...,n;\ n \in N$, dimana sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan *u-v path* dikatakan sebagai *rainbow path* pada *G* jika tidak terdapat dua sisi pada *path* yang berwarna sama. Suatu graf *G* dikatakan *rainbow-connected* terhadap pewarnaan sisi, jika G memuat rainbow *u-v path* untuk setiap dua titik *u* dan *v* pada *G*. Jika graf *G* bersifat *rainbow connected* maka pewarnaan sisinya dinamakan *rainbow coloring* pada *G*. Konsep tentang *strong rainbow connection (src)* di perkenalkan oleh X. Hou dan Y. Sun pada tahun 2010. Graf *G* merupakan *strongly rainbow connected* jika *G* memuat suatu *rainbow u-v geodesic* untuk setiap dua titik *u* dan *v* di *G*. Jika *G* merupakan *strongly rainbow connected (src)*, maka pewarnaan *c* dinamakan *strong rainbow coloring* dan minimal warna yang diberikan dinamakan *strong rainbow connection number* dinotasikan *src(G)*. Suatu *strong rainbow coloring* dari *G* dengan menggunakan *src(G)* warna dinamakan sebagai suatu minimum *strong rainbow coloring* dari *G*. Sehingga $rc(G) \geq src(G)$ untuk setiap graf terhubung *G*.

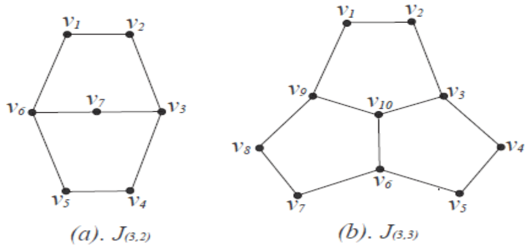
Berikut ini diberikan contoh *rainbow coloring* untuk graf terhubung G_6.Graf G_6 mempunyai minimum pewarnaan *rainbow u-v path* dan *rainbow u-v geodesic* adalah tiga, sehingga diperoleh $rc = src\ (G_6) = 3$



Gambar 6. Graf terhubung G_6 dengan $rc=src(G_6) = 3$

D. Graf Jahangir

Jahangir's Tomb adalah pemakaman yang paling banyak dikunjungi para pejiarah saat hari libur. Nama tempat pemakaman ini adalah Shahdara Town, Lahore Pakistan. Tempat ini dibangun oleh Shah Jahan putra Jahangir ke-10 tahun setelah meninggalnya ayahnya[2]. Definisi graf Jahangir $J_{n.m}$ untuk $n \geq 2,\ m \geq 3$ adalah suatu graf dengan $(nm + 1)$ titik yaitu graf yang terdiri dari satu *Cycle* $C_{n.m}$ dengan menambahkan satu titik yang bertetangga ke m titik dari $C_{n.m}$yang berjarak n satu sama lain di $C_{n.m}$[3]. Beberapa contoh ilustrasi Graf Jahangir $J_{3,m}$ dengan $m = 2$ *dan* $m = 3$terlihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Graf Jahangir $J_{(3,2)}$, dan $J_{(3,3)}$

2. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan teori-teori yang didapat sebagai penunjang untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dan terakhir membuktikan permasalahan yang dibahas.

Adapaun langkah-langkah penelitian pada kajian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami definisi dan termologi pada suatu graf.
2. Memahami definisi dari graf jahanger $J_{(3,m)}$ untuk $m = 2$ dan $m = 3$.
3. Mendefinisikan pewarnaan sisi pada graf Jahangir $J_{(3,m)}$untuk $m = 2$ dan $m = 3$.
4. Memahami dan menentukan teorema*strong rainbow connection* dari Graf Jahanger $J_{(3,m)}$ untuk $m = 2$ dan $m = 3$.
5. Menyimpulkan hasil yang diperoleh.

3. Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini membahas tentang batas atas bilangan *strong rainbow connection (src)*$J_{(3,m)}$ pada Graf Jahangir $J_{(3,m)}$ untuk $m = 2$ dan $m = 3$.Graf Jahangir $J_{(n.,\ m)}$ dengan $n = 3$ dan $m = 2$ dan $m = 3$ diperoleh batas atas bilangan *strong rainbow connection* Graf Jahangir $J_{(3,m)}$ seperti disajikan dalam Teorema 1 berikut[4]. Teorema 1. Misalkan terdapat bilangan bulat $m = 2$ dan $m = 3$, maka batas atas bilangan *strongrainbow connection* dari Graf Jahangir $J_{3,m}$yaitu $src\ (J_{3,m}) \leq \frac{m^2}{8} + \frac{m}{4} + 3$untuk $m = 2$, dan $src\ J_{(3,m)} \leq \frac{3m+3}{2} - 1$untuk $m = 3$.

Bukti

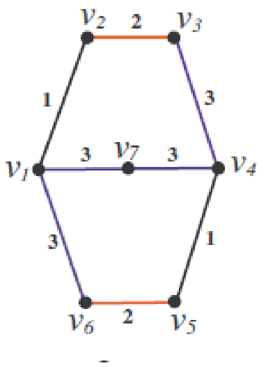
Kasus 1. Untuk *m* = 2

Dibuktikan batas atas dari bilangan *rainbow connection* dari graf Jahangir yaitu $src\ (J_{3,m}) \leq m^2/8 + m/4 + 3$. Didefinisikan pewarnaan sisi pada Graf Jahangir $(J_{3,m})$. Misalkan $V\ (J_{3,6}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$c(e) = 1$, dimana $e = v_i\ v_{i+1}$ untuk $i=1,4$
$c(e) = 2$, dimana $e = v_i\ v_{i+1}$ untuk $i = 2,5$
$c(e) = 3$, dimana $e = v_i\ v_{i+1}$ untuk $i = 3$
$c(e) = 4$, dimana $e = v_i\ v_{i+3}$ untuk $i = 4$
$c(e) = 3$, dimana $e = v_i\ v_{i+5}$ untuk $i = 1$
$c(e) = 2$, dimana $e = v_i\ v_{i+6}$ untuk $i = 1$

Diketahui Graf Jahangir $J_{(3,2)}$ memiliki diameter 3. Agar lintasan dengan panjang $d(u,v)$ memuat *rainbowu-vgeodesic* haruslah minimal warnanya sebanyak $rc(J_{3,2})$. Jika diperoleh bilangan $rc(J_{3,2}) = 3$ sedangkan pemberian 3−warna untuk setiap dua titik yang tidak bertetangga masih memuat lintasan yang tidak *rainbow u-v geodesic*, maka minimal pewarnaannya haruslah 4−warna. Karena pemberian 4−warna untuk setiap dua buah titik u dan v yang berbeda memuat lintasan tersebut *rainbowu-v geodesic* sehingga tidak mungkin $src(J_{3,2}) > 4$, akan tetapi haruslah $src(J_{3,2}) = 4$. Jadi diperoleh batas atas bilangan *strong rainbow connection* pada Graf Jahangir, yaitu $src(J_{3,2}) \leq 4$.

Ilustrasi bilangan *strong rainbow connection* untuk Graf Jahangir $J_{(3,2)}$dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8.*src* $(J_{3,2}) = 4$

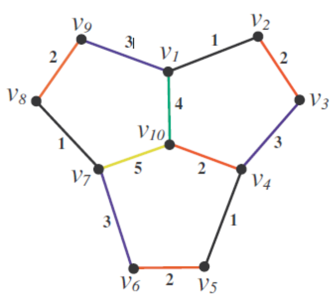
Kasus 2. Untuk *m*= *3*

Dibuktikan batas atas dari bilangan *strong rainbow connection* dari graf Jahangir yaitu *src* $J_{(3,m)} \leq \frac{3m+3}{2} - 1$. Didefinisikan pewarnaan sisi pada $J_{(3,m)}$. Misalkan $V(J_{3,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$c(e) = 1$, dimana $e = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 4, 7$
$c(e) = 2$, dimana $e = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 2, 5, 8$
$c(e) = 3$, dimana $e = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 3, 6$
$c(e) = 5$, dimana $e = v_i v_{i+3}$ untuk $i = 7$
$c(e) = 2$, dimana $e = v_i v_{i+6}$ untuk $i = 4$
$c(e) = 3$, dimana $e = v_i v_{i+8}$ untuk $i = 1$
$c(e) = 4$, dimana $e = v_i v_{i+9}$ untuk $i = 1$

Diketahui Graf Jahangir$J_{(3,3)}$memiliki diameter *4*. Agar terdapat lintasan yang panjangnya *d(u,v)* memuat *rainbow u-v geodesic* haruslah minimal pewarnaanya sebesar *rc* $(J_{3,3})$. Jika diperoleh batas atas bilangan *rc* $(J_{3,3}) \leq 5$ sedangkan pemberian *5*-warna untuk setiap dua buah titik yang berbeda memuat lintasan tersebut *rainbow u-v geodesic*, sehingga tidak mungkin *src* $(J_{3,3}) > 5$, akan tetapi haruslah *src* $(J_{3,3}) = 5$. Jadi diperoleh batas atas bilangan *strong rainbow connection* pada graf Jahangir, yaitu *src* $(J_{3,3}) \leq 5$.

Ilustrasi *strongrainbow connection* untuk Graf Jahangir $J_{(3,3)}$, dapat dilihat pada Gambar 9.



Gambar 9. *src* $(J_{3,3}) \leq 5$

4. Kesimpulan

Kesimpulan dalam penelitian ini adalah diperolehnya batas atas bilangan *strong rainbow connection*pada Graf Jahangir $J_{(3,m)}$untuk $m = 2$ dan $m = 3$. Bilangan *strong rainbow connection (src)* Graf Jahangir $J_{(3,m)}$ untuk $m = 2$ dan $m = 3$ yaitu *src* $(J_{3,m}) \leq \frac{m^2}{8} + \frac{m}{4} + 3$untuk$m= 2$, dan *src* $J_{(3,m)} \leq \frac{3m+3}{2} - 1$untuk $m = 3$.Pada penelitian ini, hanya ditentukan batas atas bilangan *strongrainbow connection* untuk Graf Jahangir$J_{(3,m)}$ dengan $m = 2$ dan $m = 3$. untuk pembahas selanjutnya, pembaca dapat menentukan batas bawahbilangan *strong rainbow connection* untuk Graf Jahangir$J_{(3,m)}$ dengan $m = 2$ dan $m = 3$.

Ucapan Terimakasih

Penelitian ini dapat dilaksanakan dengan baik berkat bantuan berbagai pihak, untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Dharmas Indonesia yang telah membantu dalam proses penyelesaian penelitian ini .

Daftar Rujukan

[1] Bondy, J., & Murty., U. (2008). *Graph Theory*. New York: Graduated Texts in Mathematics. Springer.

[2] Chartrand, G. J. (2008). Rainbow Connection in Graphs. *Math. Bohem.*, 26-98,85-133.

3] Leordusamy. A, S. S., & Mathivana. (2011). On Pebbling Jahangir Graph. *Gen. Math*, 42-49.

[4] Sun, X. L. (2013). On the Strong Rainbow Connection of grafh. *Bull malays Math, Sci, Soc*, 36.

[5] Chartrand,G.&Zhang,P.2009. Chomatic Graph Theory. New York:CRC Press Company.

[6] Chartrand,G. lesniak.L.&Zhang,P.2015. *Graph dan Diagraph*. California: CRC Press.

[7] Sudaryono.2015.*Kalkulus Differensial dan Integral(Teori dan Aplikasi* .Jakarta: Prenadamedia Group.

[8] Wilson,Robin J. 1996.*Introduction Graph Theory Fourth Edition*. Longman Group

[9] Munir,Rinaldi.2010. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika Bandung.

[10] Mahmudah,Wilda,dan Illah winayati Triyatna. 2018. Teori Bilangan. Ponorogo: Uwais Inspirasi Indonesia